CĂLĂTORIE PRIN SPAŢII *N*-DIMENSIONALE

Descoperirea algebrei liniare

ESTEBAN FERRER VACCAREZZA

SOLEDAD LE CLAINCHE MARTÍNEZ

Traducere de Lucia Pilțu

LITERA

București

LIBRIS | We know books

SUMAR

Capitolul 0

Introducere, evoluție istorică și motivare

„Algebra este generoasă, adesea ne dă mai mult decât îi cerem."
(J.-B. d'D'Alembert, 1717-1783)

În era globalizării și a internetului este complicat să înțelegem cum au evoluat conceptele științifice și matematice ale începuturilor. În general, descoperirile aveau loc în același timp în diverse puncte ale planetei, fără să fie necesară o legătură între populațiile care dezvoltau noile concepte. În trecut, necesitatea și comerțul erau cele care constituiau motorul dezvoltării matematicii, spre deosebire de faimă, bani și dorința de publicare a zilelor noastre. Este surprinzător când găsim în China texte foarte vechi, ca *Nouă capitole ale artei matematicii* (secolul al III-lea î.Hr.), în care sunt prezentate unele concepte care vor fi redescoperite numai după mult timp în Europa.

În Europa și Orientul Mijlociu cultura matematică și științifică își are originile în texte grecești scrise de mari învățați precum **Aristotel** (384-322 î.Hr.) sau **Arhimede** (287-212 î.Hr.). De-a lungul secolelor al VI-lea și al VII-lea, creștinii traduseseră multe opere din greacă în siriană (noua limbă a Asiei occidentale, care din secolul al III-lea luase locul limbii grecești) în centrul cultural din Jundishapur, localitate din Iran cunoscută și ca Gundeshapur. După cucerirea musulmană, Jundishapur a devenit primul centru islamic al științei și al medicinei; aici învățații aparținând popoarelor evreiești, creștine, persane și grecești, dar nu numai, s-au dedicat traducerii textelor științifice din siriană în arabă.

În anul 762, Damascul (actualmente în Siria) și Bagdadul (în Irak) au devenit centre culturale. În special Bagdadul era cunoscut pentru studiul a două discipline: astronomia și matematica. Cu toate acestea, bazele dezvoltării matematicii din Bagdad datează în jurul anului 800 și, chiar și astăzi, nu știm să le determinăm, chiar dacă recunoaștem importanta influență indiană. În India matematicile foloseau deja cifra zero și adoptaseră notarea pozițională care atribuie o valoare fiecărui număr în baza poziției ocupate într-un sistem de numărare.

La Bagdad s-a înființat *Casa Înțelepciunii*, un institut de traduceri și cercetări în diverse domenii, printre care științele umaniste, medicina, alchimia, zoologia, cartografia, astronomia și matematica. Aici au fost traduse texte în limbile persană, indiană și greacă, precum operele lui Euclid, Arhimede, Diocle, Diofant, Platon, Aristotel, Galenus, Plotin și Hipocrate, pentru a cita doar câțiva autori clasici ai științei grecești. Traducătorii nu erau experți ai limbii, ci și oameni de știință care au acordat atenție rigorii matematice și care au îmbogățit textele cu exemple și comentarii detaliate care ajutau înțelegerea și dezvoltarea operelor și conceptelor matematice. Bagdadul era considerat orașul cel mai bogat al lumii și principalul centru al dezvoltării culturale, unde s-a adunat o cantitate inegalabilă de cunoștințe.

În contextul islamic, putem să împărțim evoluția matematicii în trei etape. Pe parcursul primei etape a fost asimilată fie cultura greacă, fie cea orientală și, prin intermediul logicii, se formulează teoreme (sau concluzii), plecând de la definiții și axiome (propunere argumentată într-un corp teoretic); ideea de bază este explicată în *Elemente* de Euclid, carte care datează din anul 300 î.Hr. Dintre textele grecești, se remarcă unii autori pentru contribuția lor fundamentală la dezvoltarea matematicii: **Thales** (624-546 î.Hr.) și **Pitagora** (582-507 î.Hr.), datorită teoremelor lor care au fost cruciale pentru dezvoltarea geometriei, **Aristotel** (384-322 î.Hr.), care a pus bazele logicii, și **Arhimede** (287-212 î.Hr.), care a studiat spirala și a conceput o metodă exhaustivă pentru a calcula aria de dedesubt a unui arc de parabolă, pe lângă elaborarea unor formule pentru calcularea volumului suprafețelor de rotație. A doua fază a început în secolul al IX-lea, când s-a început adăugarea unor comentarii traducerilor; în astfel de comentarii, cunoștințele grecești erau aplicate la probleme simple de calcul numeric. Pe parcursul celei de-a doua faze, în cadrul Casei Înțelepciunii, se naște algebra, o teorie revoluționară care deschide drumul noilor descoperiri matematice și care reunește conceptele numerice și geometrice, considerând mărimile geometrice și numerele raționale și iraționale ca obiecte algebrice. În sfârșit, cea de-a treia etapă s-a dezvoltat începând cu secolul al X-lea, când cunoștințele matematice începuseră să se răspândească drept consecință a necesității de a efectua calcule astronomice, alături de metodele de aproximație ale trigonometriei și ale algebrei liniare.

Părintele algebrei

Se crede că ar fi fost **Al-Khwarizmi** (780-850), născut în apropiere de Bagdad și care a fost unul dintre învățații ce frecventau Casa Înțelepciunii. Aici, împreună cu alți colegi, s-a dedicat traducerii de texte științifice grecești și studiului astronomiei, geometriei și matematicii bazate pe simbolurile sistemului numeric indian și pe notarea pozițională. Al-Khwarizmi a scris două tratate; pe primul l-a intitulat *Al-Kitab al-mukhtasar ti Hisab al-jabr w'al-muqabala* (*Calculul cu restaurare și opoziție*), apărut în anul 830. Totuși, în secolul al XII-lea, când cartea a fost tradusă în latină, s-a ales adoptarea titlului *Ludus algebrae et almucgrabalaeque*, care cu timpul s-a redus la *Algebra*. Este vorba despre prima carte de algebră din istorie în care se rezolvă probleme ale vieții contemporane. Din acest motiv, Al-Khwarizmi e cunoscut drept părintele algebrei.

Munca sa algebrică se bază pe rezultatele matematicianului indian **Brahmagupta** (598-668) și reflecta influențele babiloniene și grecești. În carte, Al-Khwarizmi arată și explică numerele naturale (1, 2, 3...) și, studiindu-le, individualizează șase tipuri de ecuații, prezentând pentru fiecare metoda de rezolvare și furnizând, în unele cazuri, fundamente logice, ca, de exemplu, pătratele egale cu radicali sau cu numere şi rădăcinile egale cu numere. Astfel de ecuaţii sunt următoarele:

1) $bx = ax^2$
2) $bx = c$
3) $ax^2 = c$
4) $ax^2 + bx = c$
5) $bx + c = ax^2$
6) $ax^2 + c = bx$

În sus-numitele ecuaţii a, b şi c sunt numere întregi pozitive (numere naturale). Desigur, cititorii nu se vor lăsa impresionaţi de niciuna din aceste ecuaţii, având în vedere că se învaţă rezolvarea la şcoală. Cu toate acestea, trebuie să privim în contextul epocii, acesta este secolul al IX-lea, timp în care bazele matematicii erau disciplinate de progresele Greciei antice care introduceau mai ales concepte trigonometrice şi de calcul numeric, sau bazele erau puse de matematicile indiene. Al-Khwarizmi propune să se rezolve astfel de ecuaţii prin intermediul unei metode de reducere, utilizând operaţiunile de completare şi echilibrare (eliminarea termenilor negativi şi reducerea termenilor pozitivi la aceeaşi putere, când se găsesc în ambii membrii ai ecuaţiei). E demn de reţinut marea dificultate pe care o implica epoca, spre exemplu, nu propune doar rezolvarea ecuaţiei 4) „completând pătratele", ci simplul fapt de a înţelege ecuaţia care, iniţial, părea oarecum abstractă. Al-Khwarizmi caută un fundament teoretic în geometria care se bazase pe algebră, sau construieşte figuri geometrice specifice căutând dovezi ale teoriei algebrice.

Cel de-al doilea tratat pe care l-a scris este mai puţin cunoscut, dar la fel de interesant. Era centrat pe aritmetică şi permitea ca, începând cu secolul al X-lea, sistemul numeric poziţional să ajungă la europeni, răspândindu-se în Europa prin Spania. Cu toate acestea, cartea a fost tradusă în latină doar trei secole mai târziu. Anterior sistemului numeric poziţional, va trebui semnalată numerotarea greacă, ce utiliza literele alfabetului ca numere şi chiar numerotarea romană (folosită până atunci în Europa), care consta într-o versiune îmbunătăţită a sistemului grecesc, introducând noi numere, precum 5, 50 și 500, prin alte litere (V, L, D). Este curios că, datorită acestei cărți, s-a răspândit cuvântul *algoritm*, pentru a se referi la procedee sistematice de calcul; acest cuvânt își are originea chiar în numele autorului. Al-Khwarizmi a răspândit unele concepte algebrice precum ecuațiile pe care le-am văzut, dar, fără îndoială, algebra liniară explicată în această carte trece dincolo de asta. Desigur, algebra liniară rezolvă ecuațiile simple (precum cele precedente), dar permite și extinderea acestor concepte la rezolvarea sistemelor de ecuații; acestea din urmă, de fapt, iau în considerare multe ecuații și variabile care trebuie să fie rezolvate unitar și care acceptă doar o soluție (sau niciuna). Rezolvarea sistemelor de ecuații (despre care vom vorbi în capitolul 1 și pe care le vom relua în capitolele următoare) a permis proiectarea de mașini și avioane sau înțelegerea mecanicii particulelor subatomice și a universului. Drumul de la Al-Khwarizmi până astăzi e lung și complex și pe parcursul său au fost făcute numeroase descoperiri, unele au fost uitate, altele regăsite, până în zilele noastre, când este posibilă aprofundarea oricărui subiect pe internet. După ce am amintit, în această primă parte a cărții, cine a fost părintele algebrei, vom continua cu o scurtă introducere istorică despre dezvoltarea algebrei liniare, prezentând patru matematicieni care, în opinia noastră, au contribuit în mod substanțial la dezvoltarea acestei discipline: **Gabriel Cramer** (1704-1752), **Hermann Günther Grassmann** (1809-1877), **James Joseph Sylvester** (1814-1897) și **Alan Mathison Turing** (1912-1954).

Cei patru aleși poate nu sunt atât de faimoși ca alții care au contribuit în aceeași măsură și își vor face o apariție trecătoare în călătoria noastră, ca în cazul ilustrului **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777-1855). În orice caz, autorii pe care i-am ales ne vor permite să ne referim la câteva noțiuni esențiale ale algebrei liniare, pe care le vom aprofunda în capitolele următoare. Cele patru teme care vor fi prezentate sunt *sistemele de ecuații, algebra abstractă, vectorii și matricele* și, în cele din urmă, *calculul* pentru rezolvarea problemelor matematice.

Gabriel Cramer (1704-1752) a fost remarcat foarte devreme pentru abilitățile sale de matematician. La doar 18 ani, obține un doctorat despre teoria sunetului și la 20 candidează pentru catedra de filosofie a Academiei Calvin, la Geneva, în Elveția sa natală. Pentru această poziție s-au prezentat trei candidați: Amédée de la Rive, Giovanni Ludovico Calandrini și Gabriel Cramer. Primul era cel mai în vârstă și favoritul comisiei, în vreme ce Calandrini și Cramer aveau 21 și, respectiv, 20 de ani. Comisia a rămas atât de uimită de talentul celor doi tineri, încât a decis să nu cedeze catedra doar lui de la Rive, candidatul cu mai multă experiență. Impresionați de potențialul celor doi pretendenți, membrii comisiei au decis să dividă catedra de filosofie în două, una de filosofie și una de matematică. I-au atribuit lui de la Rive catedra de filosofie și au oferit-o pe cea de matematică celor doi tineri. Oferta consta în a împărți catedra de matematică, în maniera de a împărți lecțiile, temele academice și, evident, salariul: Cramer ar fi predat geometria și mecanica, în vreme ce Calandrini ar fi predat algebra și astronomia. În timpul liber de la îndatoririle academice ar fi putut să călătorească. În acest context, Cramer a putut călători în Europa și a interacționat cu matematicienii cei mai renumiți ai epocii, ca Johann Bernoulli și Euler la Basel, Daniel Bernoulli la Sankt Petersburg, Halley, de Moivre și Stirling în Anglia. Aceasta i-a permis nu doar să învețe de la cei mai buni, ci și să stabilească un schimb epistolar permanent care l-a ajutat să-și facă cunoscute lucrările. Datorită acestor relații a putut fi editorul diverselor cărți, printre care operele complete ale lui Johann Bernoulli, în 1742.

În 1750, Cramer a publicat *Introducere în analiza liniilor curbe algebrice*, pe când avea aproximativ de 40 de ani. Acest text conține într-un apendice celebra „regulă a lui Cramer" (pentru sisteme extrem de mari). Regula permite să se găsească soluții pentru sisteme de ecuații, utilizând determinanți (vom descoperi în ce anume

NU CRAMER A FOST PRIMUL

Există texte precedente celor ale lui Gabriel Cramer, în care sunt propuse metode utile de rezolvare a sistemelor de ecuații. Spre exemplu, în cartea chineză *Nouă capitole ale artei matematicii* (secolul III î.Hr.) se vorbea deja despre cum să se rezolve sistemele de patru ecuații cu patru necunoscute. Un alt exemplu este matematicianul japonez Seki Kowa (1642-1708), care în 1683 a introdus conceptul de determinanți și metoda de a-i calcula.

În Europa, noțiunea de determinant a apărut pentru prima oară în 1683, într-o scrisoare a lui Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) către Guillaume de l'Hôpital (1661-1704), în care expeditorul explica faptul că un sistem determinat de ecuații liniare are rezolvare. În acel timp, determinanții erau cunoscuți sub numele de rezultanți, dar Cramer a fost cel care a răspândit în Europa regula ce permite rezolvarea unor astfel de sisteme. Meritul final îi revine totuși lui Colin Maclaurin (1698-1746), care în 1748 a demonstrat regula lui Cramer.

constă, în capitolul 1), cu mult înainte de a se fi vorbit concret despre determinanți sau matrice. Obiectivul lui Cramer consta în calcularea conicii (ecuație de gradul doi) care trece prin cinci puncte, permițând rezolvarea unui sistem de cinci ecuații cu cinci necunoscute. Și astăzi, regula lui Cramer se învață la școală.

Capitolul 1 al acestei cărți este dedicat rezolvării sistemelor de ecuații. În capitolul următor va fi prezentată nu doar regula lui Cramer, ci și alte metode pentru a obține soluții. În afară de aceasta, prin intermediul câtorva exemple, vom explica importanța sistemelor de ecuații.

Abstracție și rigoare matematică

„Pare că destinul lui Grassmann este acela de a fi redescoperit din când în când, de fiecare dată ca și când ar fi fost uitat după moartea sa din 1879."

(Dauben & Lewis, *History of Mathematics from Antiquity to the Present*)

Hermann Günther Grassmann (1809-1877), după ce a terminat școala cu brio, a început să studieze teologia la Berlin, în 1827. Aici a studiat și limbile clasice, filosofia și literatura, dar, în mod ciudat, nu frecventa cursuri de matematică sau fizică. La terminarea studiilor, Grassman a început să se intereseze de matematică, probabil datorită influenței tatălui său, profesor de matematică și fizică la liceu. Grassmann obține un post de profesor la liceul din orașul său natal, unde predă matematica, fizica, germana, latina și religia. În afară de acestea, concilia lecțiile cu activitatea de cercetare în domeniul matematicii.

De la Grassmann provine generalizarea conceptelor și posibilitatea de manipulare a spațiilor vectoriale și subspațiilor (a se vedea capitolul 2), datorită gradului de abstractizare pe care l-a introdus în matematică. De exemplu, a gândit simboluri utile pentru a reprezenta entități geometrice cu care să se poată executa operații. Definind entitățile și operațiunile asociate acestor entități, a reușit să se elibereze de complicațiile care derivau din folosirea corpurilor tridimensionale.

Din nefericire, matematicienii din epoca sa nu au știut să prețuiască potențialul tehnicilor expuse de Grassmann, care nu a avut parte de recunoașterea ce o merita. Unul dintre contemporanii săi, August Ferdinand Moebius (1790-1868), a refuzat să-i scrie prologul cărții, susținând că ideile sale abstracte ar fi trebuit să fie însoțite de concepte intuitive, pentru a ajuta cititorii în înțelegere. Lucrarea lui Grassmann a fost redescoperită și apreciată spre sfârșitul secolului al XIX-lea și începutul secolului XX, devenind o sursă de inspirație pentru o pleiadă de savanți, precum Cartan, Hankel, Peano și Klein.

SPAȚII VECTORIALE: VINA NU A FOST DOAR A LUI GRASSMANN

La începutul secolului al XIX-lea numerele complexe erau folosite pentru a executa operații cu vectori din plan, urmând munca lui Argand, Wessel și Gauss; erau, în orice caz, vectori doar bidimensionali și nu exista nimic similar pentru a lucra pe trei dimensiuni.

Din acest motiv, în general, se reține că începutul algebrei vectoriale moderne ar coincide cu două evenimente recente. În primul rând, în 1843, Hamilton (1788-1856) a formulat cuaternarii, numere hipercomplexe de tipul $w + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, cu produse necomutative. Denotațiile părții scalare (w) și ale celei vectoriale $(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ se datorează lui Hamilton. La scurt timp, în 1844, Grassmann introduce ideea de spațiu vectorial, care, totuși, nu a avut mult succes. E nevoie să aștepte până în 1888, când Peano (1858-1932) a dat prima definiție axiomatică a spațiului vectorial, prin care a reușit să explice munca lui Grassman (la vremea sa neînțeles).

În domeniul fizicii, la sfârșitul secolului al XIX-lea, Gibbs (1883-1946) și Heaviside (1850-1925) dezvoltă calculul vectorial, în timp ce, la începutul secolului XX, mai ales Hilbert (1862-1943) și Banach (1892-1945) s-au dedicat spațiilor vectoriale ale funcțiilor.

În capitolul 2 al acestui volum, vom prezenta câteva noțiuni despre spațiile vectoriale și despre subspații similare precum cele introduse de Grassmann. În acest capitol, în schimb, vom încerca să punem în lumină necesitatea abstractizării, însă fără a pierde din vedere utilitatea și perspectiva practică a conceptelor prezentate.

Vectori și matrice: să denumim fiecare lucru cu numele său

„Matematica este muzica rațiunii."
(James Joseph Sylvester, 1814-1897)

James Joseph Sylvester (1814-1897) se naște în Anglia, într-o familie evreiască practicantă, fapt care i-a creat mai multe probleme pe parcursul vieții. După ce a terminat școala la Londra, a promovat examenul de admitere la Universitatea din Cambridge în 1831. În 1837 a terminat studiile, dar nu s-a licențiat, din cauza respectului pentru religia sa, deoarece ceremonia de absolvire prevedea jurământul celor 39 de articole ale Bisericii Anglicane. Din 1838 a ocupat pentru trei ani catedra de Filosofie naturală (actualmente catedra de Fizică) la Universitatea din Londra, una dintre puținele care acceptau evrei. În timpul acestei perioade a publicat lucrări de cercetare în dinamica fluxurilor și ecuațiilor algebrice, care i-au conferit prestigiu la nivel internațional. În 1841, Trinity College din Dublin, unde nu era necesar să urmeze principiile religioase pe care Sylvester nu era dispus să le accepte, îi conferă mult așteptata absolvire.

Interesul lui Sylvester era matematica și acesta l-a determinat ca, la doar 27 de ani, să candideze pentru postul de profesor la Universitatea din Virginia (Charlottesville, Statele Unite). Aici nu a rămas mult, având în vedere că după doi ani a fost constrâns să abandoneze Virginia după o ceartă cu un student: Sylvester ar fi fost acuzat că l-ar fi lovit pe student cu un baston. În apărarea sa este nevoie să spunem că unele rapoarte demonstrau că studenții erau deosebit de ofensatori față de profesori (chiar dacă aceasta nu justifică comportamentul său). După mai multe tentative eșuate de a obține un alt post în Statele Unite, Sylvester s-a reîntors în Anglia.

Aici a studiat dreptul și l-a cunoscut pe **Arthur Cayley** (1795-1881), și el student la drept, dar foarte pasionat de matematică, și care i-a transmis interesul pentru matrice. În anii următori, Sylvester a publicat lucrări importante despre teoria matricelor. După ce a câștigat mai multe premii, în 1877 a acceptat o catedră la Universitatea